Российская академия наук
Институт прикладной физики

М. В. Баженов, Е. Ф. Сабаев

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ГЛОБАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Препринт N 338

жний Новгород – 1993

УДК 517.9

Исследуются вопросы глобальной ограниченности решений специального класса уравнений математической физики, описывающих динамику реактора. Доказательство ограниченности основано на использовании теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Получены оценки на решения сверху.

APPLICATION OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES TO THE PROOF OF GLOBAL BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS TO A PARTICULAR CLASS OF EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.V.Bazhenov, E.F.Sabaev

The problem of global boundedness of solutions to a particular class of the equations of mathematical physics describing reactor dynamics are investigated. The boundedness is proved proceeding from the theory of positive and monotonic operators of translation along trajectories of differential equations. The upper estimates for the solutions are obtained.

Рецензент
д.ф.-м.н., проф. А.Д.Морозов

1.ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о глобальной ограниченности решений уравнений теоретической физики имеет важное, а в некоторых случаях принципиальное значение. Необходимость решения этого вопроса возникает, например, при анализе условий применимости той или иной математической модели для адекватного описания реального физического явления. Исследование проблемы глобальной ограниченности решений играет важную роль при доказательстве наличия в фазовом пространстве рассматриваемой системы притягивающего стохастического множества - странного аттрактора. Наконец, решающее значение этот вопрос приобретает при исследовании условий нормального функционирования различных физических систем.

Традиционным методом решения указанной проблемы является качественный анализ фазового пространства исследуемой системы с привлечением для этих целей метода функционалов Ляпунова. Однако практическое применение такого подхода вызывает значительные трудности, которые в случае распределенных систем часто становятся непреодолимыми. Ниже для доказательства глобальной ограниченности решений используются принципиально другие методы основанные на построении систем сравнения с последующим привлечением для их анализа теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений [1,2]. Рассматривается популярная в теории реакторов модель активной среды

$$l\frac{\partial\Phi}{\partial t} = M^2\nabla^2\Phi + \Phi\rho(x,t) + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(\Phi_i - \Phi) \quad ;$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = \lambda_i(\Phi - \Phi_i) \quad , \quad i = 1,2,\dots,N \quad ; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ax + a\Phi$$

с краевым условием

$$\Phi + \alpha(\nabla\Phi, \mathbf{n}) = 0 \quad , \quad \alpha > 0 \qquad (2)$$

на границе Γ области Ω. Здесь a - вектор из $\mathbb{R}^m$ с компонентами, зависящими от радиус-вектора $\mathbf{r}$; A - матрица $m \times m$ с компонентами, зависящими от $\mathbf{r}$; $\rho(x,t)$ - непрерывно дифференцируемая функция: $\mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$; $l, M^2, \lambda_i, \beta_i$ - положительные числа; Γ - замкнутая выпуклая поверхность. Решение уравнения (1) будем рассматривать в пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на $\Omega + \Gamma = \bar{\Omega}$ с нормой

$$\| (\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_N, x_1, \ldots, x_m) \| = \sup_{\mathbf{r}\in\Omega} \Big(|\Phi| + \sum_{i=1}^{N} |\Phi_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i| \Big) .$$

Наряду с диффузионной моделью (1),(2) рассмотрим сосредоточенную модель

$$l\frac{dn}{dt} = n\rho(x,t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i (n_i - n) \quad ;$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \lambda_i (n - n_i) \quad , \quad i = 1, \ldots, N \quad ; \qquad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + an \quad ,$$

определенную в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{N+m+1}$. Здесь элементы матрицы A и вектора a - постоянные числа. Заметим, что по физическому смыслу переменные n, n_i, Φ, Φ_i - неотрицательны.

Важным достоинством предложенного в работе метода является возможность получения оценок на норму решения. Данный метод является достаточно универсальным и без каких либо принципиальных затруднений может быть перенесен на другие модели как конечномерные так и в банаховом пространстве.

2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИИ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ЕДИНИЧНЫЙ ИМПУЛЬС

Будем предпологать, что функция $\rho(x,t)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(x,t) \le \rho_0 - f(b^T x) \quad , \qquad (4)$$

где b вектор из $\mathbb{R}^m$ с постоянными компонентами для модели (3) и компонентами зависящими от радиус-вектора $\mathbf{r}$ для модели (1),(2); $f(b^T x)$ - некоторая неубывающая функция: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица.

Предположим, что для распределенной модели (1),(2) (сосредоточенной модели (3)) спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости и выполняется условие $b^T exp(At)a \ge 0$ при всех $t \ge 0$. Последнее означает, что реакция уравнения

$$\dot{x} = Ax + an \qquad (5)$$

на дельта-функцию неотрицательна, т.е. $\sigma = b^T x \ge 0$, где x - решение уравнения (5) при $n \equiv \delta(t)$. Докажем, что при этих предположениях все решения уравнений (1),(2) (уравнений(3)) глобально ограничены.

Доказательство ограниченности начнем с анализа сосредоточенной модели кинетики (3).

Введем конус [3]

$$K(A,b) = \{x: b^T e^{At} x \ge 0 \ , \ t \ge 0\} . \qquad (6)$$

В силу условия $b^T exp(At)a \ge 0$ конус $K(A,b)$ непустой $a \in K$, причем легко показать, что вектора $exp(A\tau)a$ $(\tau \ge 0)$ также принадлежат конусу. Действительно,

$$b^T e^{At} e^{A\tau} a = b^T e^{A(t+\tau)} a \ge 0,$$

поскольку, $a \in K$ и $t + \tau \ge 0$. Таким образом, конус K - телесный. Несложно показать, что телесный конус K является нормальным [3]. Линейный функционал $\sigma = b^T x$ принимает на конусе $K(A,b)$

неотрицательные значения.

Лемма 1. Пусть $a \in K$ и матрица A - гурвицева. Тогда решение уравнения (5) $x(t) \in K$ для всех $t \geq T \geq 0$.

Доказательство. Представим $x(t)$ в виде

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-t')}an(t')dt' , \tag{7}$$

где $x_0 = x(0)$ и рассмотрим выражение

$$b^T e^{A\tau}x(t) = b^T e^{A(t+\tau)}x_0 + \int_0^t b^T e^{A(t+\tau-t')}an(t')dt' , \tag{8}$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части (8) неотрицательно, поскольку $a \in K$ и $n(t) \geq 0$. Если $x_0 \in K$, то и первое слагаемое так же неотрицательно и, следовательно, $x(t) \in K$ для всех $t \geq 0$.

Пусть $x_0 \notin K$. Спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости, поэтому при $t \to \infty$ имеем $b^T exp(At)x_0 \to 0$ и начиная с некоторого момента времени $T > 0$ решение уравнения (5) принадлежит конусу, $x(t) \in K$. ■

Прежде чем доказывать глобальную ограниченность решений системы (3) в общем случае покажем, что не существует решений монотонно растущих до бесконечности и получим оценку сверху на единичный импульс.

Итак, пусть переменная $x(t)$ монотонно возрастает, т.е. $p(t) = \dot{n}(t)/n(t) \geq 0$. Перепишем уравнения (3) в виде

$$lp = \rho(x,t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i (w_i - 1) ;$$
$$\dot{w}_i = -pw_i + \lambda_i (1 - w_i) , \tag{9}$$

где $w_i = n_i(t)/n(t)$. Очевидно, что если $p(t) \geq 0$ и $w_i(0) \leq 1$, то $w(t) \leq 1$ для всех $t \geq 0$. Кроме того, согласно Лемме 1 $x(t) \in$

K и, следовательно, $b^T x \geq 0$ для всех $t \geq 0$*). Тогда учитывая (4), из первого уравнения системы (9) имеем

$$lp(t) \leq \rho(x,t) \leq \rho_0 . \tag{10}$$

Сделаем в уравнении (5) замену переменных $x(t) = z(t)n(t)$. Получим

$$\dot{z} = -zp + Az + a . \tag{11}$$

Воспользуемся условием (10) и рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\dot{z} \geq -zp_0 + Az + a , \tag{12}$$

где $p_0 = \rho_0/l \geq p(t)$. Система сравнения получается если в (12) знак $\geq$ заменить знаком $=$. Очевидно, что линейный оператор $(A - p_0 I)$ является положительным по конусу $K(A,b)$. Следовательно, оператор $(A - p_0 I)$ монотонный и решение дифференциального неравенства (12) имеет вид

$$b^T z(t) \geq b^T (p_0 I - A)^{-1} a = \chi(p_0) . \tag{13}$$

для всех $t \geq 0$, если условие (13) выполнялось при $t = 0$.

Воспользуемся условиями (4),(13) и найдем

$$l\dot{n} \leq n[\rho_0 - f(\chi(p_0)n)] + \sum_{i=1}^{N} \beta_i (n_i - n) ;$$
$$\dot{n}_i = \lambda_i (n - n_i) , \quad i = 1,\dots,N . \tag{14}$$

Система сравнения получается заменой знака $\leq$ знаком $=$.

В пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$ рассмотрим конус векторов с неотрицательными компонентами

---

*) Если $w(0) \geq 1$ то условие $w(t) \leq 1$ выполняется начиная с некоторого момента времени $\bar{T} > 0$. Аналогично, если $x \notin K$, то согласно Лемме 1 условие $b^T x \geq 0$ имеет место для всех $t \geq T > 0$.

$$K_1 = \{x:\ x = (x_1, \dots, x_{N+1})' \ ,\ x_i \geq 0\ ,\ i = 1, \dots, N+1\} \qquad (15)$$

являющийся, очевидно, телесным и нормальным [3].

Недиагональные элементы линейного оператора в правой части (14) неотрицательны и, следовательно, его резольвента является антимонотонным по K_1 оператором. Слагаемое $-nf(\chi(p_0)n)$ не вошедшее в линейный оператор зависит только от переменной $n(t)$ стоящей в первом уравнении системы (14) на главной диагонали. Поэтому оператор сдвига по траекториям для системы сравнения обладает свойством монотонности по конусу K_1.

Очевидно, что решения системы сравнения (14) ограничены, а для достаточно больших t ограничены числом $\bar{n}$ которое находится из равенства

$$\dot{\rho}_0 = f(\chi(p_0)\bar{n}) \ . \qquad (16)$$

Итак, доказано, что при монотонном возрастании переменной $n(t)$ ее значения ограничены и начиная с некоторого момента $t = t_*$ $n(t)$ будет убывать. Таким образом, либо переменная $n(t)$ достигает своего максимального значения ($n \leq \bar{n} < \infty$) на бесконечности, либо ее изменение во времени носит импульсный характер. Кроме того, можно утверждать, что при подходящих начальных условиях: $x_0 \in K$, $n_{10} \leq n_0$ амплитуда первого импульса не превышает величины $\bar{n}$, удовлетворяющей уравнению (16).

Перейдем теперь к доказательству ограниченности решений системы (3) для любых $t \geq 0$ при произвольном характере изменения переменной $n(t)$ во времени.

Лемма 2. Для любых достаточно больших моментов времени t и t' таких что $t \geq t'$ имеет место неравенство

$$n(t') \geq n(t) exp[-\bar{p}_0(t - t')] \ , \qquad (17)$$

где $n(t)$ - решение уравнения (3), $\bar{p}_0$- максимальный корень уравнения

$$1p + \sum_{i=1}^{N} \frac{p\beta_i}{p + \lambda_i} = \rho_0 \ . \qquad (18)$$

Доказательство. Согласно Лемме 1 при любых начальных возмущениях $x(0) = x_0$, существует момент времени $t = T \geq 0$ такой, что условие $\sigma(t) = b^T x(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \geq T$. Тогда, учитывая (4), для $t \geq T$ имеем

$$1\dot{n} \leq n\rho_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i (n_i - n) \ ;$$
$$\dot{n}_i = \lambda_i (n - n_i) \ ,\ i = 1, \dots, N \ . \qquad (19)$$

Все внедиагональные элементы матрицы в правой части линейной системы (19) неотрицательны. Следовательно, оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (19) обладает свойством монотонности по конусу векторов с неотрицательными компонентами (15).

Выражение (18) дает характеристическое уравнение линейной системы сравнения (19). Тривиальный анализ показывает, что характеристическое уравнение (18) имеет только действительные корни и его максимальный корень $\bar{p}_0$- положителен.

Любое решение системы сравнения (19) $\tilde{n}(t)$ не может расти быстрее чем с показателем $\bar{p}_0$ и, следовательно, для любых t и t' ($t \geq t'$) имеет место неравенство

$$\tilde{n}(t) \leq \tilde{n}(t') exp[\bar{p}_0(t - t')] \ . \qquad (20)$$

Отсюда, учитывая монотонность оператора сдвига по траекториям для системы сравнения (19) имеем неравенство (17) для всех $t \geq t' \geq T \geq 0$. ◻

Из Леммы 2, в частности, следует, что поскольку решения системы (3) растут не быстрее чем с показателем $\bar{p}_0$, не существует решений уходящих на бесконечность за конечное время.

Рассмотрим уравнение (5). Используя представление (7) решения $x(t)$ имеем

$$\sigma(t) = b^T x(t) = b^T e^{\Lambda t} x_0 + \int_0^t b^T e^{\Lambda(t-t')} a n(t') dt' . \quad (21)$$

Воспользуемся Леммой 2 и перепишем (21) в виде неравенства

$$\sigma(t) \ge b^T exp(\Lambda t) x_0 + \int_0^t b^T exp[(\Lambda - I\bar{p}_0)(t - t')] a\, dt' n(t) =$$

$$b^T exp(\Lambda t) x_0 + b^T (\Lambda - I\bar{p}_0)^{-1} exp[(\Lambda - I\bar{p}_0)t] a\, n(t) +$$

$$b^T (\Lambda_0 - I\bar{p})^{-1} a\, n(t) . \quad (22)$$

Поскольку спектр матрицы Λ принадлежит левой полуплоскости и $\bar{p}_0 \ge 0$, первые два слагаемых в правой части (22) при $t \to \infty$ стремятся к нулю как $exp(-ct)$, $Re[\sigma(\Lambda)] \le -\varepsilon < 0$. Таким образом, при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$\sigma \ge \chi(\bar{p}_0) n ,$$

совпадающая с (13).

Итак, при $t \to \infty$ снова приходим к системе сравнения (14). Монотонность оператора сдвига по траекториям системы (14) установлена выше.

Таким образом, доказано, что при сделанных выше предположениях относительно отрицательности спектра матрицы Λ и неположительности реакции уравнения (5) на дельта-функцию, решения системы (3) ограничены на $[0,\infty)$, а при достаточно больших t переменная $n(t)$ ограничена числом $\bar{n}$ не зависящим от выбора начальных условий и удовлетворяющим уравнению

$$\rho_0 = f(\chi(\bar{p}_0)\bar{n}) , \quad (23)$$

причем, если функция f линейная $(\rho(x,t) \le \rho_0 - b^T x)$

$$\bar{n} = \rho_0 / \chi(\bar{p}_0) .$$

Предложенное выше доказательство ограниченности решений конечномерной системы (3) легко обобщается на случай нелинейной диффузионной модели (1),(2) в пространстве $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_1 \times \dots \times \mathbb{E}_1$, где $\mathbb{E}_1$ – банахово пространство, образованное совокупностью непрерывных скалярных функций, заданных на $\Omega + \Gamma$ с нормой в $\mathbb{C}[\bar{\Omega}]$.

Как и ранее, будем предпологать, что функция $\rho(x,t)$ удовлетворят условию (4), спектр матрицы Λ принадлежит левой полуплоскости и реакция уравнения (5) на импульс $\delta(t)$ неотрицательна, т.е. имеет место условие $b^T exp(\Lambda t) a \ge 0$ при всех $t \ge 0$.

Воспользуем Леммой 1 и условием (4) и для всех $t \ge T \ge 0$ ($T = 0$ если $x_0 \in K$) рассмотрим систему сравнения

$$1\frac{\partial\Phi}{\partial t} \le M^2\nabla^2\Phi + \Phi\rho_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(\Phi_i - \Phi) ;$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = \lambda_i(\Phi - \Phi_i) , \quad i = 1,\dots,N \quad (24)$$

с краевым условием (2) на Γ.

Система сравнения (24) является линейной; $M = Const$, $\rho_0 = Const$, $\beta_i = Const$, $\lambda_i = Const$ и поэтому разделяя переменные $\Phi(\mathbf{r},t) = \Phi_0(\mathbf{r})n(t)$, $\Phi_i(\mathbf{r},t) = \Phi_0(\mathbf{r})n_i(t)$ можно перейти к конечномерной системе сравнения для $n(t)$, $n_i(t)$

$$1\dot{n} \le n(\rho_0 + \lambda_0) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(n_i - n) ;$$

$$\dot{n}_i = \lambda_i(n - n_i) , \quad i = 1,\dots,N \quad (25)$$

и уравнению для $\Phi_0(\mathbf{r})$

$$M^2\nabla^2\Phi_0 = \lambda_0\Phi_0 ;$$

$$(\Phi_0 + \alpha(\nabla\Phi_0, n))|_\Gamma = 0 . \quad (26)$$

Подчеркнем, что нас интересует максимальное собственное значение λ_0 и отвечающая ему собственная функция $\Phi_0(\mathbf{r}) \ge 0$.

Конечномерная система сравнения (25) совпадает с системой (19) рассмотренной в Лемме 2. Поэтому, согласно Лемме 2 для всех достаточно больших $t \ge t' \ge 0$ имеет место неравенство

$$n(t') \ge n(t)\exp[-\tilde{p}_0(t - t')] , \qquad (27)$$

где $\tilde{p}_0$ – максимальный корень уравнения

$$lp + \sum_{i=1}^{N} \frac{p\beta_i}{p + \lambda_i} = \rho_0 + \lambda_0 . \qquad (28)$$

Используя (27) и повторяя приведенные выше рассуждения приходим при $t \to \infty$ к неравенству

$$\sigma \ge \chi(\tilde{p}_0)\Phi$$

и, следовательно, к системе сравнения

$$l\frac{\partial\Phi}{\partial t} \le M^2\nabla^2\Phi + \Phi[\rho_0 - f(\chi(\tilde{p}_0)\Phi)] + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(\Phi_i - \Phi) ;$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = \lambda_i(\Phi - \Phi_i) , \quad i = 1,\dots,N , \qquad (29)$$

с краевым условием (2).

Оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (29) – монотонный по конусу K_1 вектор-функций $u = (\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_N)$ с неотрицательными компонентами и имеет место оценка $\Phi \le \tilde{\Phi}$, где $\tilde{\Phi}$ – решение уравнения

$$M^2\nabla^2\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}[\rho_0 - f(\chi(\tilde{p}_0)\tilde{\Phi})] = 0 ;$$

$$(\tilde{\Phi} + \alpha(\nabla\tilde{\Phi}, n))|_{\Gamma} = 0 . \qquad (30)$$

В свою очередь функция $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\Phi} \le \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ – число, которое находится из алгебраического уравнения

$$\rho_0 = f(\chi(\tilde{p}_0)\bar{\Phi}) \qquad (31)$$

Суммируя полученные результаты сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия: 1) матрица A в уравнении (5) гурвицева; 2) $\rho(x,t) \le \rho_0 - f(b^Tx)$, $f(b^Tx)$ – неубывающая дифференцируемая функция; 3) импульсная переходная функция обратной связи неотрицательна: $b^T\exp(At)a \ge 0$ при всех $t \ge 0$. Тогда все решения уравнений (1),(2) (уравнений (3)) ограничены на $[0,\infty)$, а при достаточно больших t переменная $\Phi(r,t)$ (переменная $n(t)$) ограничена числом не зависящим от выбора начальных условий и удовлетворяющим уравнению $\rho_0 = f(\chi(\tilde{p}_0)\bar{\Phi})$ (уравнению $\rho_0 = f(\chi(\bar{p}_0)\bar{n})$, где $\bar{p}_0$ и $\tilde{p}_0$ – максимальные корни уравнений (18) и (28), соответственно.

3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА "СТУПЕНЬКУ" – ФУНКЦИЮ ХЕВИСАЙДА

В п.2 доказана глобальная ограниченность решений уравнений (1)-(3) при предположении, что реакция обратной связи на дельта-функцию неотрицательна.

В настоящем разделе будем предпологать, что обратная связь в системе (1)-(3) удовлетворяет более слабым условиям. Именно, реакция уравнения (5) на функцию Хевисайда $\vartheta(t)$ неотрицательна, т.е. $\sigma = b^Tx \ge 0$, где x – решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + a\vartheta(t)$$

и, кроме того, $\chi(0) = -b^TA^{-1}a > 0$. Как и ранее, предпологается, что матрица A гурвицева.

Существенное ослабление условий на обратную связь приводит, однако, к тому, что ограниченность решений удается доказать только для систем с линейной обратной связью вида

$$l\frac{dn}{dt} = n(\rho_0 - \sigma) , \qquad \sigma = b^Tx . \qquad (32)$$

Разрешим уравнение (32) относительно $n(t)$. Получим

$$n(t) = n_0\exp[(\rho_0 t - J)/l] , \qquad (33)$$

где $J = \int\limits_0^t \sigma(\tau)\, d\tau$.

Добавляя и вычитая из правой части системы (5) слагаемое $a\varepsilon J$ $(\varepsilon > 0)$ представим ее в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - a\varepsilon J + a\varepsilon\rho_0 t + ag(n) \\ \dot{J} &= b^{\mathrm{T}} x \end{aligned} \tag{34}$$

где $g(n) = n - \varepsilon l\ ln\frac{n}{n_0}$. Функция $g(n)$ достигает своего минимума при $n = n_m = \varepsilon l$

$$g(n_m) = \varepsilon l\ (1 - ln\ \frac{\varepsilon l}{n_0}) > 0 . \tag{35}$$

Рассмотрим систему сравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= A\tilde{x} - a\varepsilon\tilde{J} + a\varepsilon\rho_0 t + ag(n_m) \\ \frac{d\tilde{J}}{dt} &= b^{\mathrm{T}}\tilde{x} , \end{aligned} \tag{36}$$

и докажем, что имеет место неравенство $J \geq \tilde{J}$ для всех $t \geq 0$.

Перепишем (36) в виде

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{a}f(t) , \tag{37}$$

где $y, \bar{a} \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\bar{a} = (a_1,\dots,a_m,0)$, $y = (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m,\tilde{J})$, $f(t) = \varepsilon\rho_0 t + g(n_m)$. Покажем, прежде всего, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ спектр собственных значений матрицы $\bar{A}$ принадлежит левой полуплоскости.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\varepsilon\chi(p) + p = 0 , \tag{38}$$

где $\chi(p) = b^{\mathrm{T}}(pI - A)^{-1}a$. При $\varepsilon = 0$ спектр матрицы $\bar{A}$ содержит одно нулевое собственное значение $p_1 = 0$, а остальные (совпадающие с собственными значениями матрицы A) принадлежат левой полуплоскости. Поскольку известно, что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее элементов [4,5], отрицательная часть спектра останется в левой полуплоскости и при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Остается выяснить, куда при $\varepsilon > 0$ смещается собственное значение p_1 . Представим его в виде ряда по степеням ε :

$$p_1 = \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \dots . \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38) и приравнивая слагаемые при разных степенях ε найдем

$$\alpha_1 = -\chi(0) < 0 .$$

Таким образом, доказано, что при достаточно малых положительных ε все собственные значения матрицы $\bar{A}$ лежат в левой полуплоскости.

Введем конус

$$K(\bar{A},\bar{b}) = \{y:\ \bar{b}^{\mathrm{T}}e^{\bar{A}t}y \geq 0\ ,\ t \geq 0\}. \tag{40}$$

где $\bar{b}^{\mathrm{T}} = (0,\dots,0,1)$. Заметим, что $\bar{b}^{\mathrm{T}}y = \tilde{J}$. Докажем, что конус $K(\bar{A},\bar{b})$ непустой и содержит вектор $\bar{a}$, т.е. $\bar{b}^{\mathrm{T}}exp(\bar{A}t)\bar{a} \geq 0$. Для этого достаточно показать, что реакция уравнения (37) на дельта-функцию $\delta(t)$ неотрицательна.

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ последнее условие эквивалентно условию неотрицательности реакции уравнения (5) на функцию Хевисайда и, следовательно, выполняется в силу исходных предположений. При $\varepsilon > 0$ правая часть уравнения (37) отличается от правой части невозмущенной системы (5) членами порядка ε , ограниченными в силу отрицательности спектра матрицы $\bar{A}$. Тогда, согласно теореме о непрерывной зависимости решений задачи Коши от правых частей [6] условие $b^{\mathrm{T}}y \geq 0$ будет выполняться при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на любом конечном интервале времени $T(\varepsilon)$. При $t \to \infty$ решение уравнения (36) ведет себя как $exp(-\lambda(\varepsilon)t)$, где $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, $\bar{a} \in K$ и, кроме того, конус K содержит все вектора вида $exp(\bar{A}\tau)\bar{a}$, $\tau \geq 0$, т.е. конус K является телесным. Спектр матрицы $\bar{A}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ принадлежит левой полуплоскости и $f(t) \geq 0$ для $t \geq 0$, поэтому согласно Лемме 1 решение системы (37) $y(t)$ будет принадлежать конусу K для всех

$t \geq 0$*)

Таким образом, доказано, что оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (36) монотонный по конусу (40) и ее решения ограничивают решения уравнения (34) снизу, т.е. имеет место условие $J \geq \tilde{J}$ для всех достаточно больших положительных t.

Интегрируя (36) найдем

$$\tilde{J}(t) = G(t) + \rho_0 t + \frac{1}{\varepsilon}\left\{g(n_m) + \frac{\rho_0}{b^T A^{-1} a}\right\}, \qquad (41)$$

где $G(t)$ – общее решение однородной системы , причем $G(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Вернемся к выражению (33) и сформулируем окончательное утверждение: переменная $n(t)$ ограничена сверху и при $t \to \infty$ имеет место оценка

$$n \leq \bar{n} = \varepsilon l \, exp\left\{ \frac{\rho_0}{\varepsilon l |b^T A^{-1} a|} - 1 \right\}. \qquad (42)$$

Полученный результат оформим в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия: 1) матрица A в уравнении (5) гурвицева; 2) реакция обратной связи на функцию Хевисайда неотрицательна; 3) $\chi(0) = - b^T A^{-1} a > 0$. Тогда все решения системы (3) ограничены на $[0,\infty)$, а при достаточно больших t переменная $n(t)$ ограничена числом $\bar{n}$ не зависящим от выбора начальных условий и удовлетворяющим выражению (42).

Используем предложенное выше доказательство для получения не зависящей от ε оценки вида (42) на переменную $n(t)$ системы с обратной связью колебательного характера

$$\sigma^{(2)} + \gamma\sigma^{(1)} + \sigma = n . \qquad (43)$$

Очевидно, что условие отрицательности спектра матрицы A означает положительность параметра $\gamma > 0$. Кроме того, будем предполо-

---

*) Если $y_0 \in K$, то согласно Лемме 1 $y(t) \in K$ для всех $t \geq T > 0$.

гать, что $\gamma < 2$. Случай $\gamma > 2$ сводится к рассмотренному в п.2, поскольку реакция уравнения (43) на импульс будет при этом положительна.

Рассмотрим уравнение сравнения аналогичное системе (36)

$$\tilde{J}^{(3)} + \gamma\tilde{J}^{(2)} + \tilde{J}^{(1)} + \varepsilon\tilde{J} = \varepsilon\rho_0 t + g(n_m) \qquad (44)$$

и найдем при каких $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $J \geq \tilde{J}$.

Предпологая, что $\varepsilon \ll 1$ и пренебрегая членами порядка ε^2 выпишем собственные значения характеристического уравнения :

$$p_1 = -\varepsilon ;$$
$$p_{2,3} = -\frac{\gamma - \varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 - 1 - \varepsilon(\frac{\gamma}{2} - 1)} . \qquad (45)$$

Решение однородного уравнения

$$\tilde{J}^{(3)} + \gamma\tilde{J}^{(2)} + \tilde{J}^{(1)} + \varepsilon\tilde{J} = 0 , \qquad (46)$$

удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{J}(0) = \tilde{J}^{(1)}(0) = 0$, $\tilde{J}^{(2)}(0) = 1$, при $\alpha = \gamma^2 / 4 - 1 - \varepsilon(\gamma / 2 - 1) < 0$ имеет вид

$$\tilde{J}(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{|\alpha|}\,(|\alpha| + \eta^2)} \{\sqrt{|\alpha|} - e^{-\eta t}[\eta \, sin(\sqrt{|\alpha|}\, t) +$$
$$+ \sqrt{|\alpha|}\, cos(\sqrt{|\alpha|}\, t)]\} , \qquad (47)$$

где $\eta = (\gamma - 3\varepsilon)/2$. Легко показать, что при $\eta > 0$ функция

$$F(t) = e^{-\eta t}[\eta \, sin(\sqrt{|\alpha|}\, t) + \sqrt{|\alpha|}\, cos(\sqrt{|\alpha|}\, t)]$$

достигает своего максимума $F_{max} = \sqrt{|\alpha|}$ при $t = 0$. Следовательно, решение (47) неотрицательно если

$$\varepsilon < \gamma/3 \,. \tag{48}$$

Условие (48) имеет вполне понятный смысл: осциллирующие решения $\sim exp(p_{2,3}t)$ уравнения (46) должны спадать быстрее, чем монотонное $\sim exp(p_1 t)$.

Таким образом, установлено, что при $\varepsilon < \gamma/3$ реакция уравнения (44) на дельта-функцию $\delta(t)$ неотрицательна. Следовательно, оператор сдвига по траекториям для уравнения (44) монотонный и имеет место условие $J \geq \tilde{J}$. Кроме того, очевидно, что для значений ε удовлетворяющих неравенству (48) собственные значения (45) принадлежат левой полуплоскости.

Решение уравнение (44) может быть представлено в виде

$$\tilde{J}(t) = G(t) + \rho_0 t + \frac{1}{\varepsilon}\{g(n_m) - \rho_0\} \,, \tag{49}$$

где $G(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Используя (42), приходим к искомой оценке для $n(t)$ не зависящей от ε

$$n \leq \frac{l\gamma}{3}\, exp\left\{\frac{3\rho_0}{l\gamma} - 1\right\} . \tag{50}$$

В заключение заметим, что для модели с конкретной обратной связью анализ расположения корней характеристического уравнения (38) на комплексной плоскости также как и исследование реакции системы сравнения (36) на дельта-функцию с целью нахождения не зависящей от ε оценки на n вида (50) может быть выполнен с помощью ЭВМ.

Литература

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 331 с.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. *Сабаев Е.Ф.* Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980. 192 с.
4. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 270 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Поступила в редакцию
26 июня 1993г.